ЛА Кадиерна II раздел

26-11-12.

Линейни изображения

Основни свойства на линейните изображения. Изоморфизъм на линейни пространства

Деф:
Изображението $\varphi: U \to V$ на линейни пространства U и V е линейно, ако $\varphi(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \dots + \lambda_n \varphi(u_n)$ за $\forall u_i \in U$, $\forall \lambda_i \in F$

Пример за линейно изображение е $\mathcal{O}$ (нулевото) $\mathcal{O}: U \to V$, $\mathcal{O}(u) = \vec{0}$ за $\forall u \in U$
по-точно $\mathcal{O}(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \vec{0}_V = \lambda_1 \vec{0}_V + \dots + \lambda_n \vec{0}_V = \lambda_1 \mathcal{O}(u_1) + \dots + \lambda_n \mathcal{O}(u_n)$

Деф:
Линейните изображения $\varphi: U \to U$ на ЛПП в себе си се наричат линейни оператори в U. Например тъждественото изображение (идентитета) $\mathrm{Id}_U: U \to U$, $\mathrm{Id}_U(u) = u$ за $\forall u \in U$ е линеен оператор в U. Защото $\mathrm{Id}_U(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \lambda_1 \mathrm{Id}_U(u_1) + \dots + \lambda_n \mathrm{Id}_U(u_n)$

ТВ
Изображението $\varphi: U \to V$ на линейни пространства U и V е линейно $\Leftrightarrow$ са изпълнени едновременно условията
(i) $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ за $\forall u_1, u_2 \in U$
(ii) $\varphi(\lambda u_1) = \lambda \varphi(u_1)$ за $\forall u_1 \in U$, $\forall \lambda \in F$
Док-во $\to$

Следва от това, че $u_1 + u_2 = 1u_1 + 1u_2$ и λu_1 са частни случаи на линейни комбинации на вектори от U

←

С индукция по броя n на събираемите в линейна комбинация при $n = 1 \Rightarrow$ $f(\lambda_1 u_1) \overset{(ii)}{=} \lambda_1 f(u_1)$. За произволно $n \geq 2$ имаме $f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1}) + \lambda_n u_n)$ $\overset{(i)}{=} f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1}) + f(\lambda_n u_n) \Rightarrow$ с индукционно предположение и (ii) $\Rightarrow$ $\lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$

Основен пример за линейно изображение

Ако $e_1 \dots e_n$ е базис на ЛП U то изображението $f: U \to F^n$, което $f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = (x_1 \dots x_n)$ е линейно изображение. Наистина $f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i)$ и условие 2 $f(\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)) = f(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) e_i) =$ $= (\lambda x_1 \dots \lambda x_n) = \lambda(x_1 \dots x_n) = \lambda f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$

Свойства на линейните изображения

1) Ако $f: U \to V$ е линейно изображение то $f(\vec{0}_U) = \vec{0}$

Док-во

За $\forall u \in U$ и $0 \in F \Rightarrow 0u = \vec{0}$. Следователно $f(\vec{0}_U) = f(0u) = 0 f(u) = \vec{0}_V$

2) Ако $f: U \to V$ е линейно изображение то за $\forall u \in U$ в сила $f(-u) = -f(u)$

Док-во

От $-u = (-1)u$ следва $f(-u) = f((-1)u) = (-1) f(u) = -f(u)$

3) Ако $f: U \to V$ е линейно изображение и $a_1 - a_n \in U$ са ЛЗ вектори то образите им $f(a_1) - f(a_n)$ са ЛЗ

Док-во

Ако $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = \vec{0}_U$ с $\lambda_i \neq 0$ то $\vec{0}_V \overset{f(i)}{=} f(\vec{a}_i) = f(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 f(a_1) + \ldots + \lambda_k f(a_k)$ с $\lambda_i \neq 0$

Така се всяка нетривиална линейна комбинация на $a_1 - a_k$ се наследява от $f(a_1) - f(a_k)$

Теорема

Еднозначна определеност на линейни изображения от образите на базис

Ако $e_1 - e_n$ е базис на ЛП U, $v_1 - v_n \in V$ са произволни вектори, то $\exists$-ва единствено линейно изображение $f: U \to V$ с $f(e_i) = v_i$ за $\forall\ 1 \leq i \leq n$

Док-во

Съществуване на линейно изображение

Разглеждаме изображението $f: U \to V$

$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ то е коректно определено защото $\forall u \in U$ има еднозначно определени координати $x_1 - x_n$ спрямо базиса $e_1 - e_n$.

Изображението f е линейно, съгласно

$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = f(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) + f(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i)$ и

$f(\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i v_i =$

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

Освен това $\varphi(e_i) = \varphi(0e_1 + \ldots + 1e_i + \ldots + 0e_n) = 0v_1 + \ldots + 1v_i + \ldots + 0v_n = v_i$

Единственост

Ако $\psi: U \to V$ е линейно изображение с $\psi(e_i) = v_i$ за $\forall\, 1 \le i \le n$ то

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \underset{\text{лин}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \Rightarrow$$

$$\forall\ \psi \equiv \varphi$$

Деф.

изображението $\varphi: U \to V$ на линейни пространства U и V е линеен изоморфизъм, ако φ е линейно и взаимно еднозначно

Деф.

Линейните пространства U и V на поле F са изоморфни, ако съществува линеен изоморфизъм $\varphi: U \to V$

Лема

Ако $\varphi: U \to V$ е линеен изоморфизъм то $\varphi^{-1}: V \to U$ е линеен изоморфизъм, т.е $\varphi^{-1}: V \to U$ е линейно

Док-во

Трябва да проверим че $\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$ за $\forall\, v_1 v_2 \in V$ и $\varphi^{-1}(\lambda v_1) = \lambda \varphi^{-1}(v_1)$ за $\forall\, v_1 \in V$ и $\forall\, \lambda \in F$. Съгласно взаимната еднозначност на φ, условието $u_1 = u_2$ за $\forall\, u_1, u_2 \in U$ е еквивалентно на $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$

За $u_1 = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$ и $u_2 = \varphi^{-1}(v_1 + v_2)$ имаме

$f(u_1) = f(f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)) \overset{f\ е}{=\!=\!=} ff^{-1}(v_1) + ff^{-1}(v_2) =$
$v_1 + v_2 = ff^{-1}(v_1 + v_2) = f(u_2)$ откъдето $f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2) =$
$u_1 = u_2 = f^{-1}(v_1 + v_2)$. Аналогично за
$u_1 = \lambda f^{-1}(v_1)$, $u_2 = \lambda f^{-1}(v_2)$ е в сила
$f(u_1) = f(\lambda f^{-1}(v_1)) \overset{f\ е}{=\!=\!=} \lambda ff^{-1}(v_1) = \lambda v_1 = ff^{-1}(\lambda v_1) =$
$f(u_2)$ т.е. $\lambda f^{-1}(v_1) = u_2 = u_1 = f^{-1}(\lambda v_1)$

16)

Нетривиалните крайномерни пространства U и V са изоморфни $\Leftrightarrow \dim U = \dim V$

Док-во $\rightarrow$

Ако $f: U \to V$ е линеен изоморфизъм и $e_1 - e_n$ е базис на U. Достатъчно е да докажем че $f(e_1) = \ldots = f(e_n)$ е базис на V за да получим че $\dim V = n = \dim U$. Наистина за $\forall v \in V$ $\exists$ единствено $u \in U$ с $f(u) = V$. Векторът $u \in U$ има координати $x_1 - x_n$ спрямо базиса $e_1 - e_n$ на V т.е. $v = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) =$

$f \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \in f(f(e_1) - f(e_n)) \Rightarrow$

$f(f(e_1) - f(e_n)) = V$

Ако $\vec{0}_U = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \overset{f\ е}{=\!=\!=} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \overset{\text{СБ}}{=} f(\vec{0}_U)$ то

$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \vec{0}_U$ съответно взаимната еднозначност на f. Сега линейната независимост на $e_1 - e_n$ изисква $x_1 = \ldots = x_n = 0$ т.че $f(e_1) - f(e_n)$ са НЗ, а оттам и базис на V

$\leftarrow$

Нека $\dim U = n = \dim V \in \mathbb{N}$. Разглеждаме еднозначно определените линейни изображения

$f: U \to V$ и $\psi: V \to U$ с $f(e_i) = f_i$ и $\psi(f_i) = e_i$ за $\forall 1 \le i \le n$. В резултат $\psi f(e_i) = e_i$ $f\psi(f_i) = f(e_i) = f_i$ откъдето $f\psi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \overset{f е}{=\!=} \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right) \overset{\psi е}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} x_i \psi f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Следователно $\psi f e = Id_U$ откъдето $U \xrightarrow{f} V$ е взаимно еднозначно $f^{-1} = \psi$

Забележка

За всяко поле F и $\forall n \in \mathbb{N}$, съществува единствено с точност до линеен изоморфизъм линейно пространство F^n над F с размерност n. По-точно за n-мерно линейно пространство U и $\forall$-ви базис $e_1 - e_n$ на U съществува линеен изоморфизъм $f: U \to F^n$ $f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = (x_1 - x_n)$, който трансформира векторите от U в наредените n-торки от координатите им спрямо фиксирания базис $e_1 - e_n$ на U